• $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Στους πραγματικούς

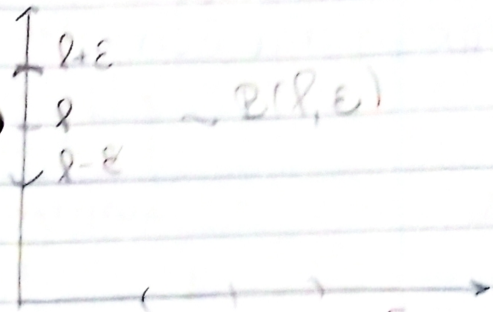
• $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Διανυσματικούς χωρ

• $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), \ell) < \varepsilon$

Στους μετρικούς χω

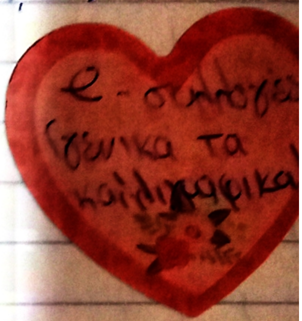
Οι ενώσεις των x_0 είναι τα ℓ



ΣΧΗΜΑΤΙΚΑ

$\sim |x - x_0| < \delta \sim B(x_0, \delta)$

• $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(\ell, \varepsilon)$



ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ $\mathcal{T}$ αν-ν $E \neq \emptyset$ $\quad \mathcal{T} \subseteq P(E)$

i) $\emptyset, E \in \mathcal{T}$
ii) $\forall A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$
iii) $\forall (A_i)_{i \in I}$ με $A_i \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

Πρέπει να πληρούνται για να είναι τοπολογία

Η τοπολογ... είναι ανοι... χτά σύνολ...

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$E = \{a, b, c\}$ $\quad P(E) = 2^3 = 8$ στοιχεία

Θέλω να βρω μια τοπολογία του E

$\mathcal{T}_1 = P(E)$ είναι πάντα τοπολογία, καθώς πληρούν τα i), ii...

(είναι η πιο μεγάλη τοπολογία)

Η $P(E)$ ονομάζεται τετριμμένη τοπολογία

$\mathcal{T}_2=\{\emptyset, E\}$ τοπολογία καθώς πληρεί τα i) ii) iii)
είναι η πιο μικρή τοπολογία

$\mathcal{T}_3=\{\emptyset, E, \{a,b\}, \{b,c\}\}$ <u>δεν</u> είναι τοπολογία καθώς δεν πληρεί το ii)

$\mathcal{T}_4=\{\emptyset, E, \{a,b\}, \{b,c\}, \{b\}\}$ είναι τοπολογία καθώς πληρεί τα i), ii), iii) και οι τομές υπάρχουν ανά δύο

$\mathcal{T}_5=\{\emptyset, E, \{a\}\}$ είναι τοπολογίες
ή
$\{b\}$
ή
$\{c\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Οι μετρικοί χώροι είναι και τοπολογικοί χώροι

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$E=\{a,b\}$ και $\mathcal{T}=\{\emptyset, \{a,b\}, \{a\}\}$

• Μπορώ να βάλω μια μετρική στο E ώστε η $\mathcal{T}$ να είναι τοπολογία; ΟΧΙ

Έστω $d: E^2 \to \mathbb{R}$ με $d(a,b)=\rho>0 \Rightarrow B(a,\frac{\rho}{2})=\{a\}$

κ' $B(b,\frac{\rho}{2})=\{b\}$

$\{b\} \notin \mathcal{T}$ άρα η $\mathcal{T}$ είναι μη μετρικοποιήσιμη.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Σε μια τοπολογία υπάρχει πάντα μια μετρική, αλλά το αντίθετο δεν ισχύει. Δηλαδή, δεν μπορώ να "βάλω" μια μετρική στο σύνολο E ώστε η $\mathcal{C}$ να είναι τοπολογία.

$\mathcal{A}=\{[a,b)\}\cup\{\emptyset\}\cup\{\mathbb{R}\}$ δεν είναι τοπολογία καθώς

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\frac{1}{n},1)=(0,1)$ δεν είναι της μορφής $[a,b)$.

Δεν ικανοποιεί, δηλαδή, το iii)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$E\neq\emptyset$ και $\mathcal{C}=\{X\subseteq E: X^c$ πεπερ$\}\cup\{\emptyset\}$ είναι τοπολογία;

i) Ισχύει καθώς $\emptyset, E\in\mathcal{C}$.

ii) $A,B\neq\emptyset$ και $A,B\subseteq E \Rightarrow A\cap B$

$(A\cap B)^c=\underset{\text{πεπερ.}}{A^c}\cup\underset{\text{πεπερ.}}{B^c}$ } πεπερ. Επομένως $A\cap B\in\mathcal{C}$

iii) $(A_i)_{i\in I}$, $A_i\in\mathcal{C}$

$\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)^c=\bigcap_{i\in I}A_i^c\subseteq A_{i_0}^c$ πεπερασμένο

Άρα $\bigcup_{i\in I}A_i\in\mathcal{C}$.

Η $\mathcal{C}=\{X\subseteq E: X^c$ πεπερ$\}\cup\{\emptyset\}$ ονομάζεται συμπεπερασμένη (cofinite)

Εάν $\mathcal{E}=\{1,\dots,2019\}$ δηλαδή είναι πεπερασμένο, ~~τα~~ η παραπάνω τοπολογία $\mathcal{C}$ είναι πεπερασμένη

Εάν στην παραπάνω τοπολογία $\mathcal{C}$ βάλω ένα απειροσύνολο όπως το $\mathbb{N}$, τότε από ένα μέρος και πέρα περιέχει όλους τους $\mathbb{N}'$

Εάν βάσω $\mathcal{E}=\mathbb{N}$, έχω τη διακριτή τοπολογία

Enjoy
Η $\mathcal{C}$ ονομάζεται αναριθμήσιμη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$\mathcal{C}=\{X\subseteq\mathcal{E}: X^c:$ αριθμήσιμο$\}\cup\{\emptyset\}$

i) $\mathcal{E},\emptyset\in\mathcal{C}$, $\mathcal{E}^c=\emptyset$ αριθμήσιμο

ii), iii) Μ.Ω.

ii) Έστω $A,B\neq\emptyset$ και $A,B\subseteq\mathcal{E}\Rightarrow A\cap B$

$(A\cap B)^c$ αριθμήσιμα $\Rightarrow A^c\cup B^c$ αριθμήσιμο

↳ αριθμήσιμο από εκφώνηση

Επομένως, $(A\cap B)\in\mathcal{C}$

iii) Έστω $(A_i)_{i\in I}$, $A_i\in\mathcal{C}$.

$$\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)^c \underset{\text{De' Morgan}}{=} \left(\bigcap_{i\in I}A_i^c\right)\subseteq A_{i_0}^c \text{ αριθμήσιμο}$$

Άρα $\bigcup_{i\in I}A_i\in\mathcal{C}$

Επομένως, η $\mathcal{C}=\{X\subseteq\mathcal{E}: X^c$ αριθμήσιμο$\}\cup\{\emptyset\}$ είναι τοπολογία στον $\mathcal{E}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ τοπολογίες στο σύνολο $E \neq \emptyset$, τότε η συλλογή $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ είναι επίσης τοπολογία στο E

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ τοπολογίες $\Rightarrow \emptyset, E \in \mathcal{T}_1$ κ' $\mathcal{T}_2$ άρα $\emptyset, E \in \mathcal{T}$.

ii) αν $A, B \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ τότε $A, B \in \mathcal{T}_i, \ i = 1, 2 \xRightarrow{\mathcal{T}_i \text{ τοπολ}}$

$A \cap B \in \mathcal{T}_i \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$.

iii) Ας είναι $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 \Rightarrow A_i \in \mathcal{T}_{1,2} \ \forall i \in I \Rightarrow$

$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_{1,2}$ (επειδή $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ τοπολ.)

Άρα $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

$E = \{a, b, c\}$, $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, E, \{a\}\}$ κ' $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, E, \{b\}\}$

τότε $\mathcal{A} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}\}$

Αλλά $\{a, b\} \notin \mathcal{A}$. Άρα η $\mathcal{A}$ δεν είναι τοπολογία στο E

ΟΡΙΣΜΟΣ

$\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ κ' $\mathcal{T}_2$.

Τότε η $\mathcal{T}_1$ είναι η μεγαλύτερη καθώς έχει τα περισσότερα στοιχεία και ονομάζεται λεπτότερη ή ισχυρότερη.

Ενώ η $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ είναι η μικρότερη, καθώς έχει τα λιγότερα στοιχεία και ονομάζεται ασθενέστερη.

Η $\mathcal{T}_1$ έχει τα περισσότερα σύνολα, όχι τα μεγαλύτερα.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Τα συμπληρώματα στις τοπολογίες είναι κλειστά.
Δηλαδή, αν B κλειστό $\Rightarrow B^c \in \mathcal{T}$ (ανοιχτό)

- Αν έχω πολλές τοπολογίες, πρέπει να λέω σε ποια τοπολογία είναι κλειστό ή ανοιχτό το σύνολό μου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$E=\{a,b,c\}$

$\mathcal{T}=\{\emptyset, E, \{a\}\}$ τότε το $\{a\}$ είναι ανοιχτό
το $\{b,c\}$ είναι κλειστό
το $\{b\}$ δεν είναι τίποτα

ΕΡΩΤΗΜΑ

Έστω $\mathcal{A} \subseteq P(E)$. Υπάρχει τοπολογία τέτοια ώστε να έχει τα λιγότερα στοιχεία, αλλά να περιέχει όλο το $\mathcal{A}$;

- Αυτή η τοπολογία ονομάζεται ελάχιστη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$\{\mathcal{T} : \text{τοπολογία του } E \text{ και } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}\}$

Δεν είναι κενή, περιέχει την διακριτή που περιέχει και το $\mathcal{A}$.

Η ελάχιστη τοπολογία του $\mathcal{A}$, επομένως, είναι η

$\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \bigcap\{\mathcal{T} : \text{τοπολογία του } E \text{ και } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}\}$

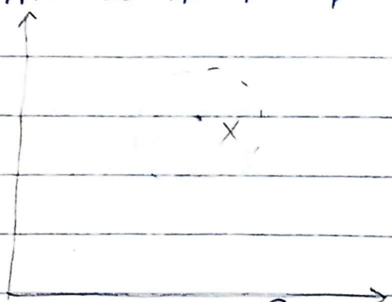
Παραδείγματα

$\mathcal{A} = \{[a,b),\ a<b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$

Τότε η $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ είναι η λεπτότερη τοπολογία καθώς περιέχει όλα τα ανοιχτά σύνολα και επιπλέον, όλα τα ημιάνοικτα διαστήματα $(\kappa, d) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\kappa - \frac{1}{n}, d)$

Στο $\mathbb{R}^2$ έχουμε την συνήθη μετρική: $d(\bar{x},\bar{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

$B(\bar{x_0}, r)$



ανοιχτά σύνολα.
A^c (A ανοιχτό) → κλειστό

- $\|\bar{x}\|_2 = |x_1| + |x_2|$
- $\|\bar{x}-\bar{y}\|_2 = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$

} Οι δύο αυτές τοπολογίες έχουν τα ίδια ανοιχτά σύνολα.

Ότι έχει η μία ανοιχτό, το έχει και η άλλη.

Ακτινωτό $\mathbb{R}^2$

$A \subseteq \mathbb{R}^2$: radially open (ακτινωτά ανοιχτό)

Contains a open line segment in each direction about each of it's point. Είναι της μορφής *

Αποδείξτε ότι είναι τοπολογία, συγκρίνετε την με τη συνήθη τοπολογία (ποια είναι λεπτότερη και ποια ασθενέστερη

Περιέχει ένα τμήμα ανοιχτής γραμμής σε κάθε κατεύθυνση για κάθε σημείο του.

Ασκηση H.W.

Έστω $A \subseteq X$, τ τοπολογία του X.
Αποδείξτε, ότι η συλλογή $\tau = \{U \cup (V \cap A) : U, V \in \tau\}$ είναι τοπολογία στο X.

Η τ ονομάζεται απλή επέκταση του A.

i) $\tau = \{U \cup (V \cap A) : U, V \in \tau\} \cup \{\emptyset\}$

$\emptyset \in \tau$.
$X \in \tau$, καθώς, αφού $U, V \in \tau$: $U \cup (V \cap A) \in \tau \Rightarrow$
$X \cup (V \cap A) \in \tau \Rightarrow X \in \tau$.